На правах рукописи

Галаев Антон Сергеевич

АЛГЕБРЫ ГОЛОНОМИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.04 — геометрия и топология

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

К а з а н ь — 2006

Работа выполнена на кафедре геометрии
Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Лосик Марк Вольфович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Аминова Ася Васильевна

доктор физико-математических наук,
профессор Кириченко Вадим Федорович

Ведущая организация:

Ярославский Государственный Университет
им. П. Г. Демидова

Защита состоится «____» ______________ 2006 г. в ______________ на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина.

Автореферат разослан «____» ______________ 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент ________________ М. А. Малахальцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие группы голономии впервые было введено в работах Э. Картана [11] и [13], в [12] он использовал группы голономии для классификации римановых симметрических пространств. Группа голономии может быть определена для произвольного главного или векторного расслоения со связностью.

В случае многообразия с линейной связностью, группа голономии является группой Ли и может быть отождествлена с подгруппой Ли группы Ли $GL(n,\mathbb{R})$, где n – размерность многообразия. Соответствующая алгебра Ли называется алгеброй голономии. Группа голономии содержит информацию обо всех параллельных геометрических объектах на многообразии (например, о параллельных тензорных полях и распределениях). Значит, разным группам голономии соответствуют разные геометрии, поэтому возникает задача классификации групп голономии. Как правило, рассматривают связную компоненту единицы группы голономии. Это равносильно изучению алгебры голономии.

В 1965 году Дж. Хано и Х. Одзеки показали, что всякая связная линейная группа Ли $G\subset GL(n,\mathbb{R})$ может быть реализована как группа голономии пространства линейной связности [16]. Эта связность, как правило, имеет ненулевое кручение. Согласно теореме Амброза-Зингера, для алгебры голономии $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ многообразия с линейной связностью *без кручения* имеем $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{g}$, где

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g})=\{R\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n\wedge\mathbb{R}^n,\mathfrak{g})|R(u\wedge v)w+R(v\wedge w)u+R(w\wedge u)v=0 \\ \text{для всех } u,v,w\in\mathbb{R}^n\}$$

есть пространство тензоров кривизны типа $\mathfrak{g}$ и

$$L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))=\mathrm{span}\{R(u\wedge v)|R\in\mathcal{R}(\mathfrak{g}),u,v\in\mathbb{R}^n\}\subset\mathfrak{g}.$$

Подалгебры $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{g}$, можно считать кандидатами в алгебры голономии. В 1955 году М. Берже привел (без подробного доказательства) список неприводимых подалгебр $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (для произвольного $n\geq 1$), удовлетворяющих условию $L(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{g}$. Поэтому алгебры, удовлетворяющие этому условию, принято называть алгебрами Берже. Подробное доказательство (вместе с исправлениями ошибок в списке) дали недавно С. Меркулов и Л. Шваххофер, [25] и

[26]. Заметим, что для пространств линейной связности переход от общего случая к случаю неприводимой алгебры голономии невозможен.

Алгебра голономии n-мерного риманова многообразия может быть отождествлена с подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$. Классификация алгебр голономии римановых многообразий является хорошо известным классическим результатом. Теорема А. Бореля и А. Лихнеровича [9] сводит проблему классификации алгебр голономии римановых многообразий к случаю неприводимых алгебр голономии. В 1955 году М. Берже в [8] классифицировал возможные неприводимые алгебры голономии римановых многообразий. Лишь в 1987 году Р. Брайнт привел конструкции, показывающие существование римановых многообразий с каждой из специальных алгебр из этого списка [10], тем самым классификация алгебр голономии римановых многообразий была завершена. Римановы многообразия с каждой из возможных алгебр голономии представляли большой интерес геометров последние 50 лет, подробный обзор можно найти в [1, 5, 21].

Важно иметь также классификацию алгебр голономии для псевдоримановых многообразий, и в первую очередь – для лоренцевых многообразий, поскольку последние важны в физике. Например, в последнее время в связи с теорией супергравитации появляются физические работы, в которых изучаются 11-мерные лоренцевы многообразия, допускающие параллельные спинорные поля. При этом используются группы голономии ([4, 14, 15, 17, 20]). В настоящее время полная классификация получена только для лоренцевых многообразий (об этом речь пойдет далее). Имеются частичные результаты для многообразий сигнатуры $(2, n)$, [19], работы автора 3,5,6 и для многообразий сигнатуры (n, n), [7].

Рассмотрим лоренцево многообразие (M, g) сигнатуры $(1, n + 1)$ $(n \geq 0)$. Алгебра голономии многообразия (M, g) может быть отождествлена с подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)$. Теорема Ш. Ву [27] сводит проблему классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий к случаю *слабо неприводимых* алгебр голономии (слабо неприводимые подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n + 1)$ не имеют невырожденных собственных инвариантных подпространств в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n+1}$). В [8] М. Берже дал классификацию возможных неприводимых алгебр голономии для псевдоримановых многообразий. В частности, единственной неприводимой алгеброй голономии лоренцевых многообразий является $\mathfrak{so}(1, n + 1)$. Значит, необходимо получить классификацию слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, алгебр голономии лоренцевых многообразий. Первый шаг к классификации сделали в 1993 Л. Берард-Бержери и А. Икемакхен, в [6] они классифицировали слабо неприводимые, не являющиеся неприводимыми, подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$.

Цель работы. Целью работы является получение классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий.

Постановка задачи. С учетом вышесказанного, для решения проблемы классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий необходимо решить следующие 2 задачи:

(А) Получить список слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр Берже в $\mathfrak{so}(1, n+1)$.

(Б) Для каждой подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ пункта (А) найти пример лоренцева многообразия с алгеброй голономии $\mathfrak{g}$.

Методы исследования. В главе II используется векторная модель пространства Лобачевского и описание транзитивных групп подобия евклидовых пространств. В главе III используется классификация неприводимых представлений компактных алгебр Ли и методы линейной алгебры. В главе IV используются тензорные методы.

Научная новизна. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми.

Результаты, выносимые на защиту:

1) Геометрическое доказательство результата Л. Берарда-Бержери и А. Икемакхена о слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$. Классификация связных групп преобразований подобия евклидовых пространств и классификация связных транзитивных групп движений пространств Лобачевского.

2) Описание пространств тензоров кривизны для слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$. Сведение проблемы классификации слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ к проблеме классификации неприводимых слабых подалгебр Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Классификация слабых подалгебр Берже $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ для $n \leq 9$.

3) Конструкции метрик, показывающих, что подалгебры Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n+1)$ являются алгебрами голономии лоренцевых многообразий.

Теоретическое и практическое значение работы. Результаты данной работы могут быть применены для дальнейшего исследования геометрии лоренцевых многообразий с каждой из возможных алгебр голономии, для нахождения локальных параллельных геометрических объектов на лоренцевых многообразиях. Результаты работы могут быть применены также в теоретической физике, например, в связи с общей теорией относительности и в теории супергравитации.

Апробация работы. Основные результаты докладывались:
1) На молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения"(Казань, 2002).
2) На ежегодной научной апрельской конференции механико-математического факультета Саратовского государственного университета в 2003, 2004, 2005 гг.
3) На семинаре по дифференциальной геометрии в университете Гумбольтда под руководством проф. Хельги Баум (Берлин, июнь 2003, декабрь 2003, апрель 2005).
4) На летней школе-конференции, организованной IGK-870 'Arithmetic and Geometry' (Аскона, Швейцария, май 2004).
5) На летней школе-конференции, организованной IGK-870 'Arithmetic and Geometry' (Корин, Германия, май 2005).
6) В институте Ервина Шредингера (Вена, Австрия, ноябрь 2005).
7) На заседании кафедры геометрии Казанского государственного университета, декабрь 2005.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 91 странице машинописного текста и состоит из введения и четырех глав. Библиографический список содержит 57 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе I излагаются некоторые известные результаты о группах голономии псевдоримановых многообразий. В пункте 1.1 приводятся определения и основные факты, связанные с группами голономии псевдоримановых многообразий. Даны примеры и идеи доказательств некоторых теорем, показывающие технику применения групп голономии. В пункте 1.2 приводится классификация М. Берже связных неприводимых групп голономии римановых и псевдоримановых многообразий и ее следствия.

В пункте 1.3 излагается классификация слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,n+1)$ полученная в 1993 году Л. Берардом-Бержери и А. Икемакхеным в [6]. Они разделили слабо неприводимые, не являющиеся неприводимыми, подалгебры $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)$ на 4 типа и с каждой такой подалгеброй ассоциировали подалгебру $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$, называемую *ортогональной частью* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Более подробно, обозначим через $\mathbb{R}^{1,n+1}$ $(n+2)$-мерное пространство Минковского, то есть векторное пространство $\mathbb{R}^{n+2}$ с метрикой η сигнатуры $(1,n+1)$. Зафиксируем базис $p,e_1,...,e_n,q$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$, относительно которого метрика η имеет матрицу Грама формы $\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&E_n&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$. Обозначим через E евклидово пространство, порожденное векторами $e_1,...,e_n$. Иногда вместо E будем писать $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ подалгебру в $\mathfrak{so}(1,n+1)$, сохраняющую изотропную прямую $\mathbb{R}p$. В базисе $p,e_1,...,e_n,q$ алгебра Ли $\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ имеет следующий матричный вид

$$\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}=\left\{\left.\left(\begin{smallmatrix}a&-X^t&0\\0&A&X\\0&0&-a\end{smallmatrix}\right)\right|\, a\in\mathbb{R},\, X\in\mathbb{R}^n,\, A\in\mathfrak{so}(n)\right\}.$$

Всякая слабо неприводимая, не являющаяся неприводимой, подалгебра $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)$ сохраняет некоторую изотропную прямую, поэтому $\mathfrak{g}$ сопряжена некоторой слабо неприводимой подалгебре в $\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$. Напомним, что для всякой подалгебры $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ имеем $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h}'$ – коммутант $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ – центр $\mathfrak{h}$. Л. Берард-Бержери и А. Икемакхен показали, что *подалгебра $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ является слабо неприводимой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ является алгеброй одного из следующих типов:*

Тип 1. $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}=\left\{\left.\left(\begin{smallmatrix}a&-X^t&0\\0&A&X\\0&0&-a\end{smallmatrix}\right)\right|\, a\in\mathbb{R},\, X\in\mathbb{R}^n,\, A\in\mathfrak{h}\right\}$, *где $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ – подалгебра;*

Тип 2. $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & -X^t & 0 \\ 0 & A & X \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; X \in \mathbb{R}^n, \, A \in \mathfrak{h} \right\}$;

Тип 3. $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \varphi(A) & -X^t & 0 \\ 0 & A & X \\ 0 & 0 & -\varphi(A) \end{smallmatrix} \right) \middle| \; X \in \mathbb{R}^n, \, A \in \mathfrak{h} \right\}$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *– подалгебра с условием* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$ *и* $\varphi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ *– ненулевое линейное отображение со свойством* $\varphi|_{\mathfrak{h}'} = 0$;

Тип 4. $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & -X^t & -\psi(A)^t & 0 \\ 0 & A & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & \psi(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \middle| \; X \in \mathbb{R}^m, \, A \in \mathfrak{h} \right\}$, *где* m, $0 < m < n$ *– некоторое целое число,* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m)$ *– подалгебра с условием* $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \geq n - m$, *а* $\psi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}^{n-m}$ *– сюръективное линейное отображение со свойством* $\psi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Доказательство этого результата было алгебраическим. **В главе II** приводится геометрическое доказательство этого результата. Рассматривается векторная модель $(n+1)$-мерного пространства Лобачевского $L^{n+1} \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$ и его абсолют ∂L^{n+1}, который диффеоморфен n-мерной единичной сфере. Имеем естественные изоморфизмы

$$SO(1,n+1) \simeq \operatorname{Isom} L^{n+1} \text{ и } SO(1,n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \operatorname{Sim} E,$$

где $\operatorname{Isom} L^{n+1}$ есть группа всех движений пространства L^{n+1}, $SO(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ – подгруппа Ли в $SO(1,n+1)$, сохраняющая изотропную прямую $\mathbb{R}p$, и $\operatorname{Sim} E$ – группа преобразований подобия E. Множество $\partial L^{n+1} \backslash \{\mathbb{R}p\}$ отождествляется с евклидовым пространством E. Всякая подгруппа $G \subset SO(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ действует на E, более того, $G \subset \operatorname{Sim} E$.

Теорема 1. *Пусть G – связная подгруппа в $SO(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$. Тогда G действует слабо неприводимо в $\mathbb{R}^{1,n+1}$ тогда и только тогда, когда она действует транзитивно в евклидовом пространстве $E = \partial L^{n+1} \backslash \{\mathbb{R}p\}$.*

Используя описание связных транзитивных подгрупп в $\operatorname{Sim} E$, данные в [2] и [3], мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Связная подгруппа $G \subset \operatorname{Sim} E$ транзитивна тогда и только тогда, когда G сопряжена группе одного из следующих типов:*

Тип 1. $G = (A \times H) \ltimes E$, *где* $A = \mathbb{R}^+$ *– компонента единицы группы гомотетий* E *с центром* 0, $H \subset SO(n)$ *– связная подгруппа Ли и* E *– группа сдвигов;*

Тип 2. *$G = H \leftthreetimes E$;*

Тип 3. *$G = (A^\Phi \times H) \leftthreetimes E$, где $\Phi : A \to SO(n)$ есть гомоморфизм и*

$$A^\Phi = \{\Phi(a) \cdot a | a \in A\} \subset SO(n) \times A$$

– группа винтовых гомотетий E;

Тип 4. *$G = (H \times U^\Psi) \leftthreetimes W$, где имеем ортогональное разложение $E = U \oplus W$, $H \subset SO(W)$, $\Psi : U \to SO(W)$ – гомоморфизм (U рассматриваем как группу переносов в E на векторы из U), и*

$$U^\Psi = \{\Psi(u) \cdot u | u \in U\} \subset SO(W) \times U$$

– группа винтовых движений E.

Соответствующие подгруппы в $SO(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ при изоморфизме $SO(1, n+1)_{\mathbb{R}p} \simeq \operatorname{Sim} E$ исчерпывают все связные слабо неприводимые подгруппы в $SO(1, n+1)_{\mathbb{R}p}$ и их алгебры Ли имеют тот же тип, определенный Л. Берардом-Бержери и А. Икемакхеным.

Одним из применений теоремы 2 является классификация транзитивных группы движений пространства Лобачевского L^{n+1}.

Теорема 3. *Пусть $G \subset SO(1, n+1)$ – связная подгруппа, действующая транзитивно в пространстве Лобачевского L^{n+1}. Тогда, либо $G = SO^0(1, n+1)$, либо G сохраняет изотропную прямую $l \subset \mathbb{R}^{1,n+1}$, и существует базис $p, e_1, ..., e_n, q$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$, как и выше, такой, что $l = \mathbb{R}p$ и G является одной из следующих групп:*
(1) *$(A \times H) \leftthreetimes E$, где $H \subset SO(n)$ – подгруппа;*
(2) *$(A^\Phi \times H) \leftthreetimes E$, где $\Phi : A \to SO(n)$ – нетривиальный гомоморфизм и*

$$A^\Phi = \{\Phi(a) \cdot a | a \in A\} \subset SO(E) \times A.$$

Более того, группы вида $A \leftthreetimes E$ и $A^\Phi \leftthreetimes E$ исчерпывают все связные подгруппы в $SO(1, n+1)$, которые действуют просто транзитивно в L^{n+1}.

Геометрическое доказательство результата Л. Берарда-Бержери и А. Икемакхена дает также идею для классификации слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, подгрупп в $U(1, n+1) \subset SO(2, 2n+2)$, для этого нужно использовать комплексное пространство Лобачевского (работы автора 3,5).

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы (А). **В главе III** дано описание пространств $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ для слабо неприводимых подалгебр $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ в терминах их ортогональной части $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Классификация слабо неприводимых подалгебр Берже $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ сводится к классификации неприводимых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, обладающих некоторым алгебраическим свойством (слабые алгебры Берже).

Более точно, для всякой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ определим *пространство слабых тензоров кривизны типа* $\mathfrak{h}$,

$$\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \{P \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathfrak{h}) |\, \eta(P(u)v,w) + \eta(P(v)w,u) + \eta(P(w)u,v) = 0 \\ \text{для всех } u,v,w \in \mathbb{R}^n\}$$

и векторное подпространство

$$L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) = \mathrm{span}\{P(u)|P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}),\, u \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathfrak{h}.$$

Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ называется *слабой алгеброй Берже*, если $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$.

Теорема 4. *Для всякой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ имеем:*

(I) $$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}) = \mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}) \oplus \mathcal{R}(E,\mathbb{R}) \oplus \mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R});$$

(II) $$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}) = \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{R}(E,\mathfrak{h}) \oplus \mathcal{R}(p\wedge E),$$

где

$\mathcal{R}(E,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(E,\mathbb{R})$, *изоморфизм имеет следующий вид: всякое линейное отображение $L : E \to \mathbb{R}$ соответствует тензору кривизны, определяемому следующими условиями $R^L \in \mathcal{R}(E,\mathbb{R})$, $R^L(q\wedge u) = L(u)p\wedge q$, $R^L(a\,p\wedge q) = p\wedge L^*(a)$, $R^L(p\wedge u) = 0$, $R^L(u\wedge v) = 0$ для всех $a \in \mathbb{R}$, $u,v \in E$;*

$\mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, *всякое $\lambda \in \mathbb{R}$ соответствует тензору кривизны $R^\lambda \in \mathcal{R}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, определяемому следующими условиями $R^\lambda(p\wedge q) = \lambda p\wedge q$, $R^\lambda(p\wedge u) = 0$, $R^\lambda(q\wedge u) = 0$, $R^\lambda(u\wedge v) = 0$ для всех $u,v \in E$;*

$\mathcal{R}(E,\mathfrak{h}) \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, *всякий элемент $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ соответствует тензору кривизны $R^P \in \mathcal{R}(E,\mathfrak{h})$, определяемому следующими условиями $R^P(q\wedge u) = P(u)$, $R^P(u\wedge v) = -\frac{1}{2}(p\wedge P^*(u\wedge v))$, $R^P(p\wedge q) = 0$, $R^P(p\wedge u) = 0$ для всех $u,v \in E$;*

$\mathcal{R}(p\wedge E) \simeq S^2(E)$, *всякое линейное отображение $T : E \to E$, такое что $T^* = T$, соответствует тензору кривизны $R^T \in \mathcal{R}(p\wedge E)$, опре-*

деляемому следующими условиями $R^T(q\wedge u)=p\wedge T(u)$, $R^T(u\wedge v)=0$, $R^T(p\wedge q)=0$, $R^T(p\wedge u)=0$ *для всех* $u,v\in E$.

(III) *Если* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})\neq\{0\}$, *то для любого линейного отображения* $\varphi:\mathfrak{h}\to\mathbb{R}$ *с условием* $\varphi|_{\mathfrak{h}'}=0$ *имеем*

$$R(\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi})=\mathcal{R}(\ker\varphi)\oplus\mathcal{R}(E,\mathfrak{h},\varphi)\oplus\mathcal{R}(p\wedge E),$$

где

$\mathcal{R}(E,\mathfrak{h},\varphi)\simeq\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, *произвольный элемент* $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ *соответствует тензору кривизны* $R^P\in\mathcal{R}(E,\mathfrak{h},\varphi)$, *такому что* $R^P(q\wedge u)=P(u)+\varphi(P(u))p\wedge q$, $R^P(u\wedge v)=-\frac{1}{2}(p\wedge P^*(u\wedge v))$, $R^P(a\,p\wedge q)=-\frac{1}{2}p\wedge P^*(\varphi^*(a))$, $R^P(p\wedge u)=0$ *для всех* $a\in\mathbb{R}$, $u,v\in E$;

(IV) *Если существует ортогональное разложение* $E=E_1\oplus E_2$, *такое что* $\mathfrak{h}(E_2)=\{0\}$ *(т.е.* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(E_1)$*)*, $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{h})\geq n-m$, *где* $m=\dim E_1$, *то для любого линейного сюрьективного отображения* $\psi:\mathfrak{h}\to E_2$ *с условием* $\psi|_{\mathfrak{h}'}=0$ *имеем*

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi})=\mathcal{R}(\ker\psi)\oplus\mathcal{R}(E_1,\mathfrak{h},\psi)\oplus\mathcal{R}(p\wedge E_1),$$

где

$\mathcal{R}(E_1,\mathfrak{h},\psi)\simeq\mathcal{P}(\mathfrak{h})$, *произвольный элемент* $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ *соответствует тензору кривизны* $R^P\in\mathcal{R}(E_1,\mathfrak{h},\psi)$, *такому что* $R^P(q\wedge u_1)=P(u_1)+p\wedge\psi(P(u_1))$, $R^P(u_1\wedge v_1)=-\frac{1}{2}(p\wedge P^*(u_1\wedge v_1))$, $R^P(p\wedge u_2)=-\frac{1}{2}p\wedge P^*(\psi^*(u_2))$, $R^P(p\wedge q)=0$, $R^P(p\wedge u)=0$, $R^P(u_2\wedge u)=0$ *для всех* $u_1,v_1\in E_1$, $u_2\in E_2$, $u\in E$.

Следствие 1. *Всякая слабо неприводимая подалгебра* $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ *является алгеброй Берже тогда и только тогда, когда ее ортогональная часть* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ *является слабой алгеброй Берже.*

Следствие 2. *Всякая слабо неприводимая подалгебра* $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ *такая, что ее ортогональная часть* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ *является алгеброй голономии риманова многообразия, является алгеброй Берже.*

Следствие 1 сводит проблему классификации подалгебр Берже $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$ к проблеме классификации слабых алгебр Берже $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$. Далее мы изучаем их свойства.

Теорема 5. (I) *Для всякой слабой алгебры Берже* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *существует ортогональное разложение* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{n_r}$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *и разложение алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *в прямую сумму идеалов* $\mathfrak{h} = \{0\} \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_r$, *при этом* $\mathfrak{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ *при* $i \neq j$, $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *и представление* $\mathfrak{h}_i$ *неприводимо в* $\mathbb{R}^{n_i}$.

(II) *Предположим что дана подалгебра* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, *для которой существует ортогональное разложение* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{n_r}$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *и разложение алгебры Ли* $\mathfrak{h}$ *в прямую сумму идеалов* $\mathfrak{h} = \{0\} \oplus \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_r$, *при этом* $\mathfrak{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ *при* $i \neq j$, $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *и представление* $\mathfrak{h}_i$ *неприводимо в* $\mathbb{R}^{n_i}$. *Тогда имеет место равенство* $\mathcal{P}(\mathfrak{h}) = \mathcal{P}(\mathfrak{h}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}(\mathfrak{h}_r)$.

Следствие 3. *При тех же предположениях, что и в пункте (II) теоремы 5,* $\mathfrak{h}$ *является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда алгебра* $\mathfrak{h}_i$ *является слабой алгеброй Берже при всех* $i = 1, ..., r$.

Используя теорию представлений компактных алгебр Ли, мы получаем список неприводимых подалгебр $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ для $n \leq 9$. С помощью программы Mathematica 4.0 мы находим пространства $\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ как решение системы линейных уравнений. Доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Для* $n \leq 9$ *неприводимая подалгебра* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда она является алгеброй голономии риманова многообразия.*

Следующая теорема, доказанная Т. Лейстнером, обобщает этот результат для произвольных n.

Теорема (Т. Лейстнер). *Всякая неприводимая подалгебра* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *является слабой алгеброй Берже тогда и только тогда, когда она является алгеброй голономии риманова многообразия.*

Доказательство этой теоремы изложено более чем на 100 страницах, оно использует классификацию неприводимых представлений компактных алгебр Ли. В [22] эта теорема была доказана для $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2}) \subset \mathfrak{so}(n)$. Теорема 6 была получена независимо и помещена в математический архив (arXiv:math.DG/0304407). После этого появились работы [23] и [24], где Т. Лейстнер доказал свою теорему для простых $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{u}(\frac{n}{2})$, а потом для произвольных $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$.

Решение проблемы (А):

Теорема 7. *Подалгебра* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1,n+1)$ *является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй Берже тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{g}$ *сопряжена одной из следующих подалгебр* $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}, \mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} \subset \mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ *– алгебра голономии риманова многообразия.*

Глава IV посвящена решению проблемы (Б). Требуется для алгебры голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ произвольного риманова многообразия построить лоренцевы многообразия с алгебрами голономии $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}, \mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$ и $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ (если последние две алгебры существуют). Для алгебр $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$ и $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$ эту задачу решили Л. Берард-Бержери и А. Икемакхен в [6]. В пункте 4.2 мы предлагаем единую конструкцию для алгебр всех четырех типов.

Рассмотрим произвольную алгебру голономии риманова многообразия $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$. Будем исходить из того, что $\mathfrak{h}$ является слабой алгеброй Берже, т.е. $L(\mathcal{P}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}$. Имеем разложение $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m_0} \oplus \mathbb{R}^{n-m_0}$, такое что $\mathfrak{h}(\mathbb{R}^{n-m_0}) = \{0\}$ и $\mathbb{R}^{m_0}$ не содержит ненулевых подпространств, на которых действие $\mathfrak{h}$ тривиально. Значит $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m_0)$. Выберем произвольные линейно независимые элементы $P_1, ..., P_N \in \mathcal{P}(\mathfrak{h})$, образы которых порождают $\mathfrak{h}$ как векторное пространство. Определим числа $P^k_{\alpha ji}$ ($\alpha = 1, ..., N$, $i, j, k = 1, ..., m_0$) такие, что $P_\alpha(e_i)e_j = \sum_{k=1}^{m_0} P^k_{\alpha ji} e_k$. Рассмотрим следующую метрику на $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$g = 2dx^0 dx^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{m_0} u^i dx^i dx^{n+1} + f \cdot (dx^{n+1})^2,$$

где

$$u^i = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{j,k=1}^{m_0} a^i_{\alpha jk} x^j x^k (x^{n+1})^{\alpha-1}, \quad a^k_{\alpha ji} = \frac{1}{3\cdot(\alpha-1)!}\left(P^k_{\alpha ji} + P^k_{\alpha ij}\right),$$

а f – некоторая функция.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$ (если она существует) определим числа $\varphi_{\alpha i} = \frac{1}{(\alpha-1)!}\varphi(P_\alpha(e_i))$ ($\alpha = 1, ..., N$, $i = 1, ..., m_0$).

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ (если она существует) определим числа $\psi_{\alpha ij}$ ($\alpha = 1, ..., N$, $i = 1, ..., m_0$, $j = m+1, ..., n$), такие что $\frac{1}{(\alpha-1)!}\psi(P_\alpha(e_i)) = -\sum_{j=m+1}^{n} \psi_{\alpha ij} e_j$.

Результат построения можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 8. *Алгебра голономии $\mathfrak{hol}_0$ метрики g в точке 0 зависит от функции f следующим образом:*

f	$\mathfrak{hol}_0$
$(x^0)^2+\sum_{j=m_0+1}^n (x^j)^2$	$\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}}$
$\sum_{j=m_0+1}^n (x^j)^2$	$\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}}$
$2x^0\sum_{\alpha=1}^N\sum_{i=1}^{m_0}\varphi_{\alpha i}x^i(x^{n+1})^{\alpha-1}+\sum_{j=m_0+1}^n (x^j)^2$	$\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi}$(*если* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})\neq\{0\}$)
$2\sum_{\alpha=1}^N\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{j=m+1}^n \psi_{\alpha ij}x^ix^j(x^{n+1})^{\alpha-1}$ $+\sum_{j=m_0+1}^m (x^j)^2$	$\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$ (*если* $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{h})\geq n-m$)

Теорема 8 дает решение проблемы (Б). Теперь сформулируем основную классификационную теорему.

Теорема 9. *Подалгебра $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)$ является слабо неприводимой, не являющейся неприводимой, алгеброй голономии лоренцева многообразия тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из следующих подалгебр $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}},\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}},\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi},\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}\subset\mathfrak{so}(1,n+1)_{\mathbb{R}p}$, где $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ – алгебра голономии риманова многообразия.*

Согласно теореме Ву, всякая алгебра голономии лоренцева многообразия представима в виде $\mathfrak{h}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{h}_r\oplus\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{h}_1,...,\mathfrak{h}_r$ – неприводимые алгебры голономии римановых многообразий, $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(1,k+1)$ или $\mathfrak{g}$ – слабо неприводимая, не являющаяся, неприводимой алгебра голономии лоренцева многообразия.

Методы этой работы были использованы в работах автора 3 и 5 для классификации алгебр голономии псевдокэлеровых многообразий сигнатуры $(2,2n+2)$ (эти алгебры голономии содержатся в $\mathfrak{u}(1,n+1)\subset\mathfrak{so}(2,2n+2)$).

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. Галаев А. С. О группах голономии лоренцевых многообразий / А. С. Галаев // Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. – Т. 18: Материалы международной молодежной научной школы – конференции "Лобачевские чтения – 2002", 28 ноября – 1 декабря 2002 г. – Казань: Каз.мат.общ-во, 2002. – С. 28.

2. Галаев А. С. Группы движений пространств Лобачевского, группы преобразования подобия евклидовых пространств и группы голономии лоренцевых многообразий / А. С. Галаев // Известия Сарат. ун-та: Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т. 5, Вып. 1. – С. 3-12.

3. Галаев А. С. Слабо неприводимые подгруппы в $SU(1, n+1)$ / А. С. Галаев // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд – во Сарат. ун-та, 2004. – Вып. 6. – С. 27-30.

4. Galaev A. S. The spaces of curvature tensors for holonomy algebras of Lorentzian manifolds / A. S. Galaev // Differential Geometry and its Applications. – 2005. – Vol. 22. – Pp. 1-18.

5. Galaev A. S. Classification of holonomy groups for pseudo – Kahlerian manifolds of index 2 [Электронный ресурс] / A. S. Galaev. – Режим доступа: http://arXiv:math.DG/0405098, свободный.

6. Galaev A. S. Remark on holonomy groups of pseudo-Riemannian manifolds of signature $(2, n+2)$ [Электронный ресурс] / A. S. Galaev. – Режим доступа: http://arXiv:math.DG/0406397, свободный.

7. Galaev A. S. Metrics that realize all Lorentzian holonomy algebras / A. S. Galaev // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2006. – Vol. 3. – Nos. 5-6. – Pp. 1025-1045.

8. Галаев А. С. О классификации алгебр голономии лоренцевых многообразий / А. С. Галаев // Труды матем. центра имени Н. И. Лобачевского. – Т. 31: Материалы Четвертой молодежной научной школы – конференции "Лобачевские чтения – 2005", 16 – 18 декабря 2005 года. – Казань: Каз.мат.общ-во, 2005. – С. 36-38.

9. Галаев А. С. Алгебры голономии лоренцевых многообразий / А. С. Галаев // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2006. – №3, Вып. 1. – С. 5-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Алексеевский Д. В. Римановы пространства с необычными группами голономии / Д. В. Алексеевский // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2., Вып. 2. – С. 1-10.

[2] Алексеевский Д. В. Однородные римановы многообразия отрицательной кривизны / Д. В. Алексеевский // Мат. сборн. – 1975. – № 1. – С. 93-117.

[3] Алексеевский Д. В. Геометрия пространств постоянной кривизны / Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников // Итоги науки и техники. / ВИНИТИ. – Т. 29: Совр. пробл. мат. Фунд. напр. – М., 1988. – С. 5-146.

[4] Batrachenko A. Generalized holonomy of M-theory vacua [Электронный ресурс] / A. Batrachenko, M. J. Duff, J. T. Liu, W. Y. Wen. – Режим доступа: http://arXiv:hep-th/0312165, свободный.

[5] Бессе А. Многообразия Энштейна / А. Бессе. – Пер. с англ. – Т. 2. – М.: Мир, 1990. – 384 с.

[6] Berard-Bergery L. On the Holonomy of Lorentzian Manifolds / L. Berard-Bergery, A. Ikemakhen // Proceeding of symposia in pure math. – 1993. – Vol. 54. – Pp. 27-40.

[7] Berard-Bergery L. Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n,n) / L. Berard-Bergery, A. Ikemakhen // Bull. Soc. Math. – France. – 1997. – Vol. 125. – F. 1. – Pp. 93-114.

[8] Berger M. Sur les groupers d'holonomie des variétés àconnexion affine et des variétés riemanniennes / Berger M. // Bull. Soc. Math. – France. – 1955. – Vol. 83. – Pp. 279-330.

[9] Borel A. Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes / A. Borel, A. Lichnerowicz // C. R. Acad. Sci. – Paris. – 1952. – Vol. 234. – Pp. 279-300.

[10] Bryant R. Metrics with exceptional holonomy / R. Bryant // Ann. of Math. – 1987. – Vol. 126(2). – Pp. 525-576.

[11] Cartan E. Les groupes réels simples finis et continus / E. Cartan // Ann. Scient. Ecol. Norm. Sup. – 1914. – Vol. 31. – Pp. 263-355, ou Oeuvres complètes T. III. – Pp. 659-746 et Pp. 799-824.

[12] Cartan E. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann / E. Cartan // Bull. Soc. math. – France, 1926. – Vol. 54. – Pp. 214-264, 1927. – Vol. 55. – Pp. 114 – 134, ou Oeuvres complètes T. I, Vol. 2. – Pp. 587-659.

[13] Cartan E. Les groupes d' holonomie des espaces généralisés / E. Cartan // Acta. Math. – 1926. – Vol. 48. – Pp. 1-42, ou Oeuvres complètes T.III., Vol. 2. – Pp. 997-1038.

[14] Figueroa-O'Farrill J. Maximal supersymmetric solutions of ten – and eleven – dimensional supergravity [Электронный ресурс] / J. Figueroa-O'Farrill, G. Papadopoulos. – Режим доступа: http: //arXiv:hep-th/0211089, свободный.

[15] Figueroa-O'Farrill J. Supersymmetry and homogeneity of M-theory backgrounds [Электронный ресурс] / J. Figueroa-O'Farrill, P. Meessen, S. Philip. – Режим доступа: http://arXiv:hep-th/0409170, свободный.

[16] Hano J. On the holonomy group of linear connections / J. Hano, H. Ozeki // Nagoya Math. J. – 1956. – Vol. 10. – Pp. 97-100.

[17] Hull C. Holonomy and symmetry in M-theory [Электронный ресурс] / C. Hull. – Режим доступа: http: //arXiv:hep-th/0305039, свободный.

[18] Ikemakhen A. Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds / A. Ikemakhen // Ann. Sci. Math. Québec. – 1996. – Vol. 20. – N 1. – Pp. 53-66.

[19] Ikemakhen A. Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature $(2, 2 + n)$ / A. Ikemakhen // Publ. Mat. – 1999. – Vol. 43. – no. 1. – Pp. 55–84.

[20] Sfetsos K. Supersymmetry and Lorentzian holonomy in various dimensions / K. Sfetsos, D. Zoakos // J. of High Energy Physics. – 2004. – Issue 9. – Pp. 10-27.

[21] Joyce D. Compact manifolds with special holonomy / D. Joyce. – Oxford University Press, 2000. – 480 p.

[22] Leistner T. Berger algebras, weak – Berger algebras and Lorentzian holonomy / T. Leistner // Berlin, 2002. – sfb – 288. – Preprint, – no. 567.

[23] Leistner T. Towards a classification of Lorentzian holonomy Groups [Электронный ресурс] / T. Leistner – Режим доступа: http: //arXiv:math.DG/0305139, свободный.

[24] Leistner T. Towards a classification of Lorentzian holonomy groups. Part II: semisimple, non-simple weak – Berger algebras [Электронный ресурс] / T. Leistner – Режим доступа: http: //arXiv:math.DG/0309274, свободный.

[25] Merkulov S. Classification of irreducible holonomies of torsion – free affine connections / S. Merkulov, L. Schwachhöfer// Ann. Math. – 1999. – Vol. 150. – Pp. 77-149.

[26] Schwachhöfer L. On the classification of holonomy representations / L. Schwachhöfer // Habilitationsschrift, Mathematisches Institut der Universität Leipzig, 1999.

[27] Wu H. Holonomy groups of indefinite metrics / H. Wu // Pacific J. of Math. – 1967. – Vol. 20. – Pp. 351-382.